Ministerul Educaţiei şi Cercetării

Olimpiada Naţională de Matematică 2008

Etapa judeţeană şi a Municipiului Bucureşti

1 martie 2008

CLASA A VII-A
SOLUŢII ŞI BAREME ORIENTATIVE

Subiectul 1. Să se arate că

$$n\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}\right) \geq (n+1)\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n+1}\right),$$

pentru orice număr natural $n \geq 1$.

Soluţie.
Notăm cu $x = \frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}$. Atunci $n(1+x) \leq (n+1)(x+\frac{1}{n+1}) \Leftrightarrow n \leq x+1$ 4puncte

Cum $x+1 = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n} \leq 1+1+\ldots+1 = n$, cerinţa este demonstrată. 3puncte

Subiectul 2. Se consideră pătratul $ABCD$ şi punctul E pe latura AB. Diagonala AC taie segmentul DE în punctul P. Perpendiculara ridicată din P pe DE intersectează latura BC în punctul F. Să se arate că $EF = AE + FC$.

Soluţie. Prelungim segmentul BC cu segmentul $CQ = AE$, punctul C fiind între Q şi B. Triunghiurile DAE şi DCQ sunt congruente LUL, deci $DE = DQ$ şi $\angle QDC = \angle ADE$, de unde $\angle EDQ = 90°$. 2puncte

Rezultă că $\angle EDF = \angle PCF = 45°$. 2puncte

Atunci $\angle FDQ = \angle EDQ - \angle EDF = 45°$ şi $\Delta DEF \equiv \Delta DFQ$. . 2puncte

Obţinem $EF = FQ = FC+CQ = AE+FC$, ceea ce trebuia demonstrat. 1punct

Subiectul 3. Într-o şcoală sunt 10 clase. Fiecare elev dintr-o clasă se cunoaşte cu exact câte un elev din celelalte 9 clase. Să se arate că toate clasele au acelaşi număr de elevi.

(Se acceptă că dacă elevul A îl cunoaşte pe elevul B, atunci şi elevul B îl cunoaşte pe A).

Soluţie. Alegem arbitrar două clase X şi Y; este suficient să arătăm că acestea au acelaşi număr de elevi 1punct

Să presupunem prin absurd că în clasa X sunt mai mulţi elevi decât în clasa Y. 1punct

Cum fiecare elev din clasa X cunoaşte exact un elev din clasa Y, vor exista măcar doi elevi din clasa X - numiţi de exemplu A şi B - ce cunosc acelaşi elev C din clasa Y. 3puncte

Atunci elevul C va cunoaşte din aceeaşi clasă X doi elevi, anume A şi B, în contradicţie cu ipoteza. 2puncte

Subiectul 4. Fie $M = \{1, 2, 4, 5, 7, 8, \ldots\}$ mulţimea numerelor naturale care nu se divid cu 3. Suma a $2n$ elemente consecutive ale mulţimii M este 300. Să se determine valorile posibile ale lui n.

Soluţie. Primul dintre cele $2n$ numere este de forma $3k + 1$ sau $3k + 2$, deci distingem cazurile: 1punct

i) Numerele sunt $3k+1, 3k+2, 3k+4, 3k+5, \ldots, 3k+3n-2, 3k+3n-1$. 1punct

Suma acestora este $(6k + 3) + (6k + 9) + (6k + 15) \ldots + (6k + 6n - 3) = 6kn + 3(1 + 3 + 5 + \ldots + 2n - 1) = 6kn + 3n^2 = 3n(2k + n)$. Rezultă $n(2k + n) = 100$. Factorii au aceeaşi paritate, iar al doilea este mai mare, deci avem soluţiile $n = 2$ şi $n = 10$. 2puncte

ii) Numerele sunt $3k+2, 3k+4, 3k+5, \ldots, 3k+3n-2, 3k+3n-1, 3k+3n+1$. 1punct

Suma acestora este cu $3n$ mai mare decât în cazul anterior, adică $3n(2k+n) + 3n = 3(2k + n + 1)$. Obţinem $n(2k + n + 1) = 100$. Factorii au parităţi diferite, iar al doilea este mai mare, deci avem soluţiile $n = 1$, $n = 4$ şi $n = 5$. 2puncte